

Szakmai beszámoló a T43242 sz. OTKA zárójelentéséhez

A jelen 43242 számú OTKA a megelőző 30314, 16448, 1911 és 1810 számú OTKÁk egyenes folytatása. Ezen OTKÁk témája logika, algebra, algebrai logika és relativitáselmélet logikai alapozása. Az algebrai logikai kutatásoknak az az egyik alapmotívuma, hogy ugyanazt a jelenséget logikai, algebrai és geometriai nyelven is leírja és a logikai, algebrai, valamint geometriai leírások között egy precíz „átjárást” definiál. A relativitáselméleti téridő vizsgálatok felépíthetők a geometria keretei között, tehát természetes módon illeszkednek a most vázolt kapcsolatrendszerbe. Az algebrai logika, matematikai logika, és relativitáselmélet kutatásainkban szervesen összefüggő részek, és ezen összefüggést kívánjuk/kívántuk hangsúlyozni munkánkban.

A témák összefüggése miatt az eredmények alábbi témakörei sok helyen fedik egymást, egy-egy eredmény több címszó alá is kívánczik.

Algebrai logikához kapcsolódó munkák és eredmények

A definiálhatóság-elmélet jelen OTKÁ-nak egyik centrális témája. Ezt az elméletet relativitáselméleti fontossága miatt Einstein munkatársa Reichenbach kezdeményezte 1920 táján, támaszkodva Hilbert és Padoa korábbi ilyen irányú vizsgálataira. Az elméletnek átütő lendületet adott Tarski 1935-ös definícióelmélet cikke, majd Tarski egész életműve (direkt vagy indirekt formában). Az elméletnek ismét új lendületet adott Beth (Tarski egykori asszisztense), Makkai Mihály, Chang, Shelah és Pillay, Hodges és sok más mai – gyakran Shelah-hoz kapcsolódó – modellelmélész munkája.

A definícióelmélet legalább négyféle alakban jelenik meg munkáinkban: egyrészt a matematikai logika modellelmélete egy fejezeteként, másrészt a szűkebb értelemben vett algebrai logika egy lényeges fejezeteként, az algebrában mint az amalgamációs tulajdonságok (valamint epimorfizmusok szűrjektivitása) és variánsaik vizsgálata, és a relativitáselméleti munkánkban mint az un. megfigyelésorientált és elméleti fogalmak kapcsolata.

A különböző elméletekben definiálható fogalmak algebrát alkotnak. Attól függ, hogy mik az algebra műveletei és elemei, hogy milyen logikai nyelvet használunk a definiálás folyamán. Így keletkeznek pl. a cilindrikus, poliadikus, reláció- és dinamikus algebrák. A használt logika definiálhatósági tulajdonságai a megfelelő algebraosztály amalgamációhoz kapcsolódó tulajdonságainak felel meg. (Ezen algebrai tulajdonságok vizsgálatát Tarskin kívül Jónsson, McKenzie, Daigneault valamint számos 1930 körül publikáló csoportelmélész kezdeményezte.) Például az un. Beth definiálhatósági tulajdonság, amely az impliciten és expliciten definiált fogalmak egybeeséséről szól, a megfelelő algebraosztálybeli epimorfizmusok szűrjektivitásával ekvivalens.

Néhány eredmény ebben a témában, mely jelen OTKA keretében született:

A csak véges sok változójelet használó elsőrendű logika és ennek az un. Beth-féle definiálhatósági tulajdonsága fontos, intenzíven kutatott terület pl. a számítástudományban. Bizonyítottuk, hogy a Beth definiálhatósági tulajdonsága pontosan akkor van meg egy csak véges sok változójelet használó elsőrendű logikának ha a logika összes relációjele legfeljebb egyargumentumú. Ha viszont csak véges modelleket engedünk meg és megkötést teszünk a végesváltozós logika modelljeinek számosságára, akkor az $n > 1$ változójelet használó logikáknak pontosan akkor van meg a Beth definiálhatósági tulajdonsága ha legfeljebb $n + 1$ számosságú modelleket engedünk meg. Az eredményeket a megfelelő cilindrikus algebrák közti epimorfizmusok szűrjeaktivitásának vizsgálatával kaptuk. Ld. Andréka-Comer-Madarász-Németi-Sayed [ACMNS07].

Tarski tanítványaként és munkatársaként, Don Pigozzi írta meg az alapvető Henkin-Monk-Tarski algebrai logikai meghatározó monográfia definiálhatóságelméletre ill. amalgamációs tulajdonságra vonatkozó „kísérő-cikkét”. Ez az Algebra Universalis-ban 1971-ben megjelent cikk összegzi a Tarski iskola fontosnak tartott nyitott kérdéseit a témában. E kérdések egy részét korábban felvetette Comer, Daigneault, Johnson, McKenzie és mások. Az összes még nyitvamaradt kérdést sikerült kimerítően megválaszolni a [M07]-ben és a [MS07]-ben. Egy, a problémamegoldások által felvetett újabb Madarász-Németi kérdést, hogy van-e cilindrikus algebrákból álló varietás, melyre igaz az amalgamáció de nem igaz a szuperamalgamáció, sikerült pozitívan megoldani [SS06]-ban. Ld. Madarász [M07], Madarász-Sayed [MS07] és Sági-Shelah [SS06].

A kváziprojektív relációalgebrákat Tarski definiálta 1941-ben, sok közülük van a matematika megalapozásához és a halmazelmélethez. A relációalgebrák lényegében a 3-változós logika algebrai és a kváziprojekciók a halmazelméleti pár-képzést szimulálják. A neat-beágyazás fogalma Henkintől származik és annak felel meg, hogy új változójeleket vezetünk be a logikába.

A kváziprojektív relációalgebrák reprezentációtétele az elsőrendű logika valamint a végesváltozós logikák szerkezetének megértéséhez lényeges információt szolgáltat, valamint a számítástudományban sokat használnak pl. tételbizonyító programokhoz. Megmutattuk, hogy tetszőleges kváziprojektív relációalgebrában definiálni lehet véges-dimenziós cilindrikus algebráknak olyan sorozatát, melyben minden tag neat-reduktuma a következőnek és minden tag relációalgebra-reduktuma izomorf a kiinduló algebrával. Minden előforduló definíció un. termdefiníció, tehát definícióelméleti szempontból a lehető legjobban kezelhető. Fontos alkalmazása ezen eredménynek, hogy a kváziprojektív

relációalgebrák reprezentációtételére új, minden eddigőtől eltérő bizonyítást szolgáltat. Ld. Simon [Si07].

Foglalkoztunk cilindrikus algebrák neat-beágyazási tulajdonságaival. Például vizsgáltuk, hogy hogyan nyerhetők kvázi poliadikus algebrák minél általánosabb cilindrikus-típusú algebrákból. Bevezettünk ehhez egy cilindrikus algebráknál általánosabb algebra osztályt. Megmutattuk, hogy az így kapott cilindrikus-típusú algebrák neat beágyazhatóságának szükséges és elégséges feltétele a Leon Henkin nevéhez fűződő merry-go-round azonosságok teljesülése. Megmutattuk továbbá, hogy a témában fontos un. Resek-Thompson tételben szereplő gyengített C4 axióma ekvivalens a szubsztitúciók kommutativitásával. Ld. Ferenczi [F07a, F07b], Ferenczi-Sági [FS06].

Vizsgáltunk elsőrendű modellekhez rendelhető cilindrikus algebrákon valószínűségeket, például ilyen valószínűségek konstruálhatóságát. Ld. Ferenczi [F05].

Megadtuk végtelenített (infinitary) kváziazonosságokkal való axiomatizációját a szabad Kleene-algebrával paraméterezett Jónsson-féle dinamikus algebráknak. Érdekessége az axiomatizációnak, hogy az általunk megadott kváziazonosságok valódi osztályt alkotnak (cserébe viszont nagyon átlátható az axiómák tartalma). A kérdésre, hogy elég-e halmaznyi sok ezek közül az axiómák közül ugyanerre a feladatra, könnyen lehet, hogy nincs egyértelmű válasz (tehát, hogy a kérdés független a ZFC-től). Azért gondoljuk, hogy ez lehetséges, mert a problémát kapcsolatba hoztuk különféle nagy-számosság hipotézisekkel. Ez az eredmény is mutatja a kutatási téma résztémáinak szoros összefonódását: ezen eredmény például az algebrai logika, kiszámíthatóságelmélet, és a matematika megalapozása témák mindegyikéhez releváns. Ld. Henk [H03].

Az algebrai logikának fontos fejezete a kategóriaelméleti logika. Jelen team munkássága e területen is a 70-es évekig vezethető vissza, ld. pl. az „injektivitás-logikai” közelítésmódot [AN77], mely napjainkban is népszerű és virágzik [AHS07]. E területen is sikerült továbblépni, egyrészt a matematika és logika kategóriaelméleti megalapozása terén a Makkai Mihály akadémikus nevéhez kapcsolódó FOLDS „First order logic with dependent sorts” közelítésmód szellemében [Ma97], másrészt a relativitáselmélet kategóriaelméleti megközelítése irányában az SDG (synthetic differential geometry) elméleten keresztül. Az SDG egyfajta axiomatikus relativitáselméletnek is tekinthető. Ezek közül az elsőről Makkai [Ma05], [Ma07] Interneten elérhető publikációira utalunk mint a projektum beszámolási időszakában keletkezett eredményekre.

„Higher dimensional categories” (HDc-k) az a láncszem, amely összeköti a matematika alapozó (kategória-) alkalmazásokat és a fizikai alkalmazásokat. Részletesebben: A matematika alapozásánál kiindulunk abból, hogy a halmazok Set osztálya helyett van egy Topos -unk,

melynek objektumai játszá a halmazok szerepét. Felmerül a probléma, hogy ebben az alap-Topos -ban nincsenek nagy kategóriák (mert azok valódi osztályok lennének). Ezért veszünk egy nagyobb univerzumot, melynek objektumai a kategóriák, de ekkor ez a nagyobb univerzum már 2-dimenziós kategória (mert a természetes transzformációk a funktorok, mint párhuzamos nyilak között hatnak). Ez az egyre több dimenzió szükségessége nem áll meg semmilyen véges számnál, így jutunk el az ω -dimenziós kategóriák elméletéig. Mindez végül a „Higher-dimensional categories” HDc elméletéhez vezet. A HDc különböző kérdéseikhez kapcsolódnak Makkai Mihály team-tagunk fent idézett kutatásai. Ld. Makkai [Ma05], [Ma07].

Örvendetes fejlemény, hogy Univerzális Logika címmel nemzetközi együttműködés szerveződik az absztrakt modellelmélet és algebrai logika egy olyan részterületén, ahol 1971 óta az eredeti kezdeményezők között voltunk és ahol intenzíven dolgoztunk régóta. 2005 márciusban nagy nemzetközi konferenciát tartottak Montreux-ben, ahol meghívott plenáris előadók voltunk, és a következő nagy nemzetközi konferencián is, melyet Kínában tartottak 2007-ben, ismét meghívott plenáris előadók voltunk. Meghívtak a Logica Universalis újság szerkesztőbizottságába, és a Logica Universalis Könyvsorozat Advisory Board-jába. „Universal Algebraic Logic” című könyvünk ebben a témában a Birkhauser Verlagnál van megjelenőben. Ld. Andréka-Németi-Sain [ANSa07].

Modellelmélet, matematikai logika, kiszámíthatóságelmélet

Elméletek definíciós ekvivalenciáját vizsgáltuk. Egyszerű, szemléletes példát adtunk két elméletre, melyek nem definíciósan ekvivalensek, de mindegyik definíciósan visszavezethető a másikra. Ld. Andréka-Madarász-Németi [AMN05].

A tipuskihagyási tétel a matematikai logika modellelméletének egyik sokat használt eszköze, az elsőrendű logikában felírt elméletek modelljei finom-szerkezetének vizsgálatában fontos. A véges modell elméleti és számítástudományi alkalmazások időszerűvé tették annak vizsgálatát, hogy az elsőrendű logika véges sok változót használó szeletei közül melyek rendelkeznek ezen tulajdonsággal. Bizonyítottuk, hogy a 2-nél több változójelet használó szeletek nem rendelkeznek a tipuskihagyási tulajdonsággal, míg a 2-változós szeletek rendelkeznek a tulajdonsággal abban a speciális esetben mikor csak atomos elméleteket nézünk. Az volt a jól megalapozott sejtés, hogy a 2-változós szelet rendelkezni fog a tipuskihagyási tulajdonsággal. Bizonyítottuk, hogy a várakozással ellentétben, az elsőrendű logika 2-változós szelete mégsem rendelkezik a tipuskihagyási tulajdonsággal. Ennek az eredménynek számottevő algebrai logikai következménye is van, pl. 2-dimenziós cilindrikus algebraik esetében a reprezentálhatóságból nem következik a teljes reprezentálhatóság. Ld. Andréka-Németi-Sayed [ANS07], [AN07].

Modellelméletben további új eredmények jelentek meg, ld. Sági [S04], Sági-Shelah [SS05].

Gödel nemteljességi tétele, Church tétele a bizonyíthatóság eldönthetlenségéről, Tarski tétele a szemantika definiálhatatlanságáról olyan tételek, melyek a logikai és filozófiai igazság fogalom megértésében forradalmat jelentettek és az általunk is használt elsőrendű logikának az alapozásokban való alkalmazhatóságához vezettek. E mély tételek bizonyítása, paradox módon, az önreferenciával kapcsolatos igazi ellentmondásokat „fogja munkára” pozitív tudás nyerésére. E technika analizálása, mély megértése, új bizonyítások keresése lényegesen illeszkedik a jelen projektumba, hiszen pl. az időutazással kapcsolatos un. „Nagypapa Paradoxon” (ami a következő: ha vissza tudok menni időben és megölöm a nagypapámat, akkor hogyan szülehettem meg és mentem vissza megölni a nagypapámat) ugyanilyen típusú de nem igazi ellentmondás. Az időutazás ideája pedig többször felbukkan az általános relativitáselméleti téridőkkel kapcsolatban, mert pl. a forgó anyag létrehozta téridőkben szinte mindig vannak un. időszerű zárt görbék. A fent idézett tételek bizonyítását egyszerűsítettük, a diagonálási lemmát elimináltuk és a „Hazug Paradoxon”-t helyettesítettük más, szintén szemléletes paradoxonokkal. Ezek során a tételeket általánosabb alakban tudtuk kimondani, így azok több esetben alkalmazhatók. A Kluwer új sorozatában (Logic, Epistemology and the Unity of Science) készül egy kötet, mely az un. Hazug Paradoxonnak van szentelve (a paradoxon középkori története plusz Stephen Read, a St. Andrews-i Egyetem filozófia professzorának cikke plusz erre adandó válaszok és viszontválaszok). Felkérték, hogy vegyünk részt a megírásában, a cikk megjelenés alatt van. Ld. Serény [S04, S06, S07].

Logikai kiszámíthatóságelmélet témában a következő eredményeket kaptuk. Egy korábban bevezetett nemklasszikus számítási modell alkalmazására adtunk szép példát, nevezetesen megmutatuk, hogy általánosított intervallumokra alapuló számítások esetén lineáris méretű kiszámítással eldönthető egy adott PSPACE-teljes probléma. Azt is meghatároztuk, hogy milyen szintaktikus megszorítással esik egybe az általánosított intervallumra alapuló kiszámításokkal eldönthető nyelvek osztálya PSPACE-szel. Ld. Vályi [V07b] és Vályi-Nagy [NV07a]-[NV07d].

A Church-Turing Tézist (CTT a továbbiakban) vizsgáltuk szemantikaelméleti valamint komplexitáselméleti oldalról. (a) Modellelméleti ekvivalens megfogalmazást adtunk a CTT-re, miszerint egy függvényt pontosan akkor tekintünk hatékonyan kiszámíthatónak ha van Turing Gép, ami kiszámítja. Egy formulát hatékony eldöntésnek hívunk, ha az, hogy egy elem teljesíti a formulát vagy sem, az csak véges sok un. atomi relációtól függ. Bizonyítottuk, hogy egy relációhoz van Turing Gép ami eldönti pontosan akkor, ha a relációt lehet olyan formulával definiálni,

ami hatékony eldöntés. (b) A CTT fenti szemantikai megközelítésének a következő bonyolultságelméleti alkalmazását kaptuk. Ha egy formula un. hatékony eldöntés, akkor minden x öröklődően véges halmazra van egy véges tranzitív H halmaz, ami úgy mond "fixálja" a formulát x -re (azaz H minden véges U végkiterjesztése ugyanúgy viselkedik mint H , a formulára és x -re nézve természetesen). Ezt felhasználva lehet definiálni egy probléma un. fixáció-bonyolultságát. Jelölje FP azon problémákat, melyek fixáció-bonyolultsága polinomiális. Ismert tartalmazás: NP része $PSPACE$, és mivel $PSPACE$ zárt komplementálásra, azért $coNP$ is része $PSPACE$ -nek. Jelenleg $PSPACE$ a legjobb ismert felső korlátja NP -nek is és $coNP$ -nek is. Ezt a felső becslést javítottuk meg FP -vel (ami szintén zárt komplementálásra). Bizonyítottuk, hogy FP is felső korlátja mind NP -nek mind $coNP$ -nek és ugyanakkor FP része $PSPACE$ -nek. Ld. Henk [H04].

A kiszámíthatóságelmélet egy új, felfutóban levő ága az un. „Hypercomputation”, mely többek között azt vizsgálja, hogy a fizika új eredményei és a komputer-forradalom (pl. Internet térhódítása) fényében milyen újfajta számítógépmodelleket lehet és érdemes felállítani. A relativisztikus téridőkre épülő kiszámíthatóság első felfedezői közé tartozik a jelen OTKA-teamből Németi István és Mark Hogarth. Úgy tűnik, hogy az általános relativitáselmélet téridő-fogalma azt sugallja, hogy az „aktuális végtelen” valamilyen értelemben fizikai valóság lehet és ennek felhasználásával olyan számítógépeket lehet tervezni, mely Turing-kiszámíthatatlan függvényeket kiszámít. Ez új megvilágításba helyezi a Church-Tézist és a matematika alapjaira vonatkozó Hilbert program újragondolására ösztönöz.

Mark Hogarth cikkeiben a geometriai vonatkozásokra helyezi a súlyt és azt vizsgálja, hogy a kiszámíthatósági hierarchiában milyen „magasan” levő függvényeket lehet az általa konstruált, anti-de-Sitter téridőkre épülő „számítógéppel” kiszámítani. Ld. Hogarth [Ho04].

Németi István társszerzőivel a forgó, elektromosan töltött fekete lyuk Kerr-Newmann téridejét használja egy olyan computer megalkotására, mely nem-Turing kiszámítható függvényeket kiszámít. Ezen a konkrét példán azt vizsgálja, hogy az elméleti fizika és a kozmológia legújabb fejleményei hogyan hatnak vissza a matematikai logika alapfogalmaira. Ld. Németi-Dávid [ND06].

A Logic in Hungary 2005 konferencián erősen jelen volt e téma, a rangos nemzetközi résztvevőkkel megvitatásra került jelentősége, részletei. Pl. John Earman (Pittsburgh USA) is egyetértett abban, hogy e téma egyik jelentősége, hogy a matematika és fizika alapozásának lényeges kérdéseit összekapcsolja, továbbá új motivációt szolgáltat a matematika, kozmológia, filozófia olyan központi kérdéseinek vizsgálatához mint pl. végtelen-e a fizikai világunk és milyen értelemben, lesz-e „Nagy

Reccs”, van-e alsó határa annak, hogy egy bitnyi információt mennyi anyaggal lehet kódolni. A Pittsburghi Egyetem Tudományfilozófiai szemináriumán feldolgozták [ND06] cikkünket olvasószeminárium formájában.

Relativitáselmélet változatainak elsőrendű logikai axiomatizálása

A téridő elmélet (relativitás elmélet, fekete lyukak stb.) következetes logikai megalapozásán dolgozunk. Ilyen alapozás fontosságát már Hilbert is és Gödel is hangsúlyozta. A matematika mára már sikeresnek bizonyult alapozásában kulcsfontosságú, hogy az elsőrendű logika keretein belül történik. Az ilyenirányú tanulságokat felhasználva a téridő elmélet alapozását is az elsőrendű logika keretében kívánjuk felépíteni. A megelőző OTKA projektumok keretében kimunkáltuk a speciális relativitás elmélet elsőrendű logikai axiomatizálását Specrel néven. Jelen OTKA projektum munkájában a fő erőfeszítések a korábbi években kapott axiómarendszerek általános relativitáselmélet felé való kiterjesztésére irányultak.

A speciális relativitáselmélet matematikai vizsgálatában az un. Alexandrov-Zeeman tételt kiterjedten használják. Ez a tétel azt mondja, hogy a valós számnégyesek minden olyan permutációja, mely megőrzi a „45 fokos dőlésszögű” egyeneseket, az összes egyenest is megőrzi. Ez a tétel nem terjed ki olyan függvényekre, melyek nem permutációk, hanem csak a koordinátarendszer kicsi részén vannak értelmezve. Az irodalomban azt gondolták, hogy ez a tény lesz a „szűk keresztmetszete” az általános relativitáselméletbeli téridők vizsgálata felé való elmozdulásnak. Kimondtuk és bizonyítottuk az Alexandrov-Zeeman tétel olyan élesítését, melyet már lehet ilyen „lokális” függvények esetében is használni. Jelenleg ez az irodalomban fellelhető legerősebb általánosítása az Alexandrov-Zeeman tételnek. Ez az eredmény felfogható egy fogalmi analízisbeli lépésnek, mert azt mondja meg, hogy milyen típusú lokalizálás nem lesz elég az általános relativitásbeli téridők leírásában. Ld. Madarász-Németi-Tőke [MNT04].

Az általános relativitás elmélet irányába való első továbblépésünk annak vizsgálata volt, hogy Specrel alkalmas-e a gyorsuló (tehát nem inerciális) megfigyelők világképének leírására. Azt kaptuk, hogy a gyorsuló és inerciális megfigyelők kapcsolatát leíró AxCmv axiómát valamint egy elegáns új indukciós axiómasémát, az IND -et, szükséges és elégséges Specrel-hez hozzávenni ahhoz, hogy a gyorsuló megfigyelőket is tudjuk a speciális relativitáselméletben kezelni. Az így kibővített Specrel+AxCmv+IND elmélet az elsőrendű logika keretein belül marad és lehetővé teszi az olyan fontos téridő elméleti elvek bizonyítását (és pontos megfogalmazását) mint az un. Iker Paradoxon vagy a gravitáció órákra való hatása. Ez egyben egy úgynevezett reverz-matematikai

eredmény, mert azt mutatja meg, hogy a matematikai analízis eszköztárából mit szükséges beemelni Specrel -be ahhoz, hogy a gyorsuló vonatkoztatási rendszereket (másszóval gyorsuló megfigyelőket) is kielégítően lehessen tárgyalni.

Megjegyezzük, hogy a fenti IND axiómaséma nemcsak a halmazelméleti komprehenzió-axiómasémával analóg, hanem ugyanaz mint amit a nem-sztenderd idejű kiszámíthatóságelméletben használtunk a jelen OTKA korábbi verzióiban (például a Floyd program-bizonyítási módszer bizonyításelméleti erejének jellemzése ill. kalibrálása során). Ez is mutatja a résztémák szoros összekapcsolódását.

A Specrel fenti módon AxCmv -vel és az IND axiómasémával kibővített változatát Accrel-nek neveztük el. Az Accrel axiómarendszerből levezettük az iker-paradoxont (az elsőrendű logika szokásos, precíz bizonyítási rendszerével). Továbbá megmutattuk, hogy Accrel -ből az IND nélkül nem bizonyítható az iker-paradoxon. Ld. Madarász-Németi-Székely [MNSz06] és [AMNSz03].

A gyorsuló megfigyelőket is kezelni tudó, elsőrendű logikán belül maradó Accrel nevű elméletben a gravitációt gyorsulással „szimuláltuk”, és így a gravitációnak az idő lelassulását előidéző általános relativisztikus hatásáról precíz, matematikai tételeket bizonyítottunk. Einstein ekvivalencia-elvén keresztül többféleképpen is formalizáltuk és bizonyítottuk Accrel -ből a gravitáció órákra gyakorolt lassító hatását. Konstruáltunk egy olyan modelljét Accrel -nek, ahol két különböző megfigyelő ugyanolyan nagyságú gravitációt észlel, de az egyik órája mégis lassabban jár mint a másiké. Ezzel megmutattuk, hogy nem a gravitáció nagyság-különbsége felel az órák lelassulásáért. Továbbá bizonyítottunk egy olyan állítást is Accrel -ből, ami lényegében véve azt fejezi ki, hogy az alacsonyabb gravitációs potenciálon levő megfigyelők órái járnak lassabban. Ld. Madarász-Németi-Székely [MNSz07].

A fenti eredmények elismeréseként a European Science Foundation Exploratory Workshop on „Applied Logic in the Methodology of Science” (Bristol, UK, 2006 március) workshopra meghívák egyik fiatal munkatársunkat, hogy tartson előadást „Reconstruction of physical theories in first order logic” címmel.

Az általános relativitáselmélet számára adtunk egy Genrel nevű axiómarendszert, és bizonyítottuk ennek teljességét a Lorentz-sokaságokra nézve, azaz bizonyítottuk, hogy Genrel modelljei – bizonyos definíciós ekvivalencia erejéig – pontosan az általános relativitáselmélet irodalmában leggyakrabban használt Lorentz sokaságok. Genrel természetes folytatása a korábbi Accrel elméletnek. Kevés, egyszerű, jól áttekinthető elsőrendű logikában megfogalmazott axiómából áll. Ez a teljességi tétel megnyitja az utat afelé, hogy a matematika megalapozásában oly sikeres reverz matematikai módszereket az általános relativitáselméletben is alkalmazni lehessen. Ld. Andréka-Madarász-Németi [AMN07].

A relativitáselmélet logikai analízisét kiterjesztettük a korábban sikerrel vizsgált kinematikai aspektusokról a dinamikai aspektusokra is. Ezzel megindult a relativisztikus dinamika (például Einstein híres $E = mc^2$ felfedezése) logikai analízisének kiépítése. A relativisztikus tömegnövekedési tételt nagyon természetes, tisztán geometriai axiómákból bizonyítottuk. Megmutattuk, hogy ezekből a szikár, ökonomikus axiómákból a relativisztikus impulzusmegmaradás tétele még nem következik. Ugyanakkor, hasonlóan láttató és szemléletes egyszerű geometriai axiómákból bizonyítottuk az utóbbit is. Továbbmenve, megmutattuk, hogy e dinamikai megmaradástételeknek mik a tisztán geometriai ekvivalensei. Ld. Andréka-Madarász-Németi-Székely [AMNSz07].

A relativitáselméletek elsőrendű logikai axiomatizálásán belül speciális részcel ezen elméletek fragmentumainak vizsgálata. Egy ilyen fragmentum a modális logikai ún. „kauzális” fragmentum. Itt a „kauzalitás” binér reláció két „esemény” között van definiálva, és „ $x K y$ ” jelentése: „az y esemény benne van az x esemény jövőbeli fénykúpjában”. Ezzel kapcsolatban a következő két eredményt kaptuk. Jelölje Q a racionális számok halmazát, R a valós számok halmazát, és legyen n tetszőleges 1-nél nagyobb természetes szám. 1.Tétel: A (Q^n, K) struktúra monadikus másodrendű elméletének „minden-létezik $\forall\exists$ ” fragmentuma (Π_2^1) nem rekurzívan felsorolható. 2.Tétel: Az (R^n, K) struktúra monadikus másodrendű elméletének „minden \forall ” fragmentuma (Π_1^1) sem rekurzívan felsorolható. Ld. Vályi [V07a, V07b].

További matematikai fizikai eredmények

Gödel kozmológiai modelljének logikai szellemű vizsgálata során egy érdekes szembeforgási jelenségre bukkantunk. A jelenség lényege az, hogy a sok szempontból fontos zárt időszakú görbék az időorientáció ellentétes az őket létrehozó forgó anyag forgási irányával (egy jól meghatározott értelemben). Ez a jelenség élesen ellentmond a zárt időszakú görbék fizikában jelenleg elfogadott magyarázatával. Ugyanezen jelenséget megtaláltuk az összes hasonló szellemű általános relativitáselméletben vizsgált téridőmodellben is. Még a sok szempontból „kilógó” Tipler - van Stockum modellben is kimutattuk ezt a szembeforgást. Ld. Andréka-Németi-Wüthrich [ANW07].

Numerikus szimulációkat írtunk görbült téridőbeli pályák kiszámítására. Például elektromosan töltött forgó fekete lyuk téridejében a geodetikusok differenciálegyenlet rendszerének a felírása (nagyon-nagyon bonyolult képlet, kézzel gyakorlatilag lehetetlen), valamint ennek az egyenletrendszernek a numerikus megoldása, különböző kezdeti feltételek esetén. Vagyis tetszőleges helyről, tetszőleges sebességgel (tachion is!) induló részecske életútját ki tudjuk rajzoltatni. Egy egyszerűbb eset, ahol nincs elektromosan töltve a forgó fekete lyuk, megtekinthető Andai Attila honlapján, <http://www.math.bme.hu/andaia/work/kerr/index.html>

Az n -dimenziós Hilbert-tér feletti kvantummechanikai állapottér (n -level quantum system) térfogatát kiszámítottuk, az állapottéren értelmezett különböző Riemann-metrikák szerint. Továbbá kiszámítottuk az állapottér skalárgörbületét különböző visszahúzott metrikák (pull-back metrics) mellett. Ld. Andai [A07a].

Az n -változós normális eloszlások maximalizálják az entrópiát (adott várható érték és szórás mellett). Az entrópia a q -Rényi entrópia speciális esete, nevezetesen a $q=1$ esetben kapjuk vissza az entrópiát. A q -Rényi entrópiát maximalizáló eloszlások családjának a geometriáját vizsgáltuk. Ezen a téren már többféle metrikát bevezettek, geometriai, algebrai, statisztikai megfontolások alapján. Definiáltunk egy paraméteres metrikát, mely különböző paraméterek mellett visszaadja a már ismerteket, és „átjárhatóságot” biztosít közöttük. Ezen általános (paraméteres) metrika mellett meghatároztuk a geodetikusok egyenletét, melynek néhány megoldását megadtuk, meghatároztuk a Riemann-, Ricci- és skalárgörbületét a térnek. Ennek eredményeképpen megmutattuk, hogy q -paraméter (mely a q -Rényi entrópiában szerepel) hogyan befolyásolja két „közeli” eloszlás megkülönböztethetőségét. Az általános relativitáselméletben használt differenciál geometriát alkalmaztuk, valamint számolások közben az áltrelnél kifejlesztett simulációkat futtattuk ellenőrzésként. Ld. Andai [A07b].

A majdnem komplex sokaságok integrálhatóságával kapcsolatban érdekes új témát vizsgáltunk. A kérdés, amit vizsgáltunk pontosan megfogalmazva abból áll, hogy amennyiben adott egy valós differenciálható sokaság, az érintőnyalábján pedig az i -vel szorzás operátora, koordinatázható-e lokálisan a sokaság komplex számokkal? Erre egy szükséges és elegendő feltételt ad a Newlander-Nirenberg tétel (1957), melynek bizonyítása nagyon nehéz. Új, független bizonyítást adtunk erre a tételre Yang–Mills-elmélet segítségével „fizikus” ötleteket használva. A bizonyítás lépései során kapott állítások önmagukban is érdekesek. Speciálisan 4 dimenzióban pedig egy új, még erősebb integrálhatósági tétel mondható ki. A tétel alkalmazásairól: gyors, egyszerű bizonyítás adható a tvisztor-elmélet alaptételére (Penrose 1976, ill. Atiyah-Hitchin-Singer 1978), miszerint egy félig konformálisan lapos 4-sokaság tvisztor-tere komplex sokaság. Továbbá 6 dimenzióban belátható, hogy komplex struktúrák létezése kapcsolatban van $N=1$ szuperszimmetrikus Yang-Mills elméletek klasszikus megoldásaival. Ennek a kapcsolatnak a vizsgálatában is nagy segítség a fentebb említett Newlander-Nirenberg tétel újfajta megközelítése. Ld. Etesi [E04].

A gravitációs insztantonok mind a modern elméleti fizika, mind a differenciál-geometria, algebrai geometria fontos térosztályát képezik. Beláttuk, hogy egy un. hiper-Kahler, aszimptotikusan lokálisan lapos (ALF) gravitációs insztanton un. Hausel-Hunsicker-Mazzeo kompaktifikáltjának a metszetformája definit. Ennek segítségével ezek a terek

topológikusan osztályozhatók, ezt a listát tartalmazza cikkünk. Ld. Etesi [E06].

Az általános relativitáselmélet néhány fontos globális eredményének felhasználásával osztályoztuk egy aszimptotikusan lapos relativisztikus téridő fölött értelmezett Yang–Mills elmélet vákumait homotópia erejéig. Kiderült, hogy e homotópia-osztályok hasonló szerkezetűek mint a Minkowski-téridő esetében, ha a téridők kauzális struktúráját is figyelembe vesszük. Ez azt eredményezi, hogy egy általános Yang–Mills elmélet nem lehet lényegesen különböző, mint a szokásos Minkowski-tér feletti. Ld. Etesi [E07a].

Legyen S egy kompakt, irányított Riemann-felület, melynek genusza nagyobb, mint 1. Érdekes, természetes dualitást találtunk az S -en értelmezett Hitchin-elmélet, mint 2 dimenziós konform térelmélet és az $S \times R$ -en definiált 2+1 dimenziós vákum általános relativitás-elmélet között. Az ilyen típusú dualitásokat AdS/CFT-dualitásnak vagy Maldacena-sejtésnek nevezik. Az általunk talált kapcsolat matematikailag precízen megfogalmazott. Ld. Etesi [E07b].

Kiszámoltuk a fentebb már említett ALF gravitációs insztantonok felett értelmezett Yang–Mills insztantonok modulusterét, ezáltal egységes képbe gyűrtünk több korábbi szórványos eredményt a témában. Ld. Etesi-Jardim [EJ07].

Munkánk visszhangja, jelenlétünk a nemzetközi tudományos életben

„Logic in Hungary 2005” címmel nemzetközi konferenciát rendeztünk Budapesten, 2005 augusztus 5 és 11 között. A konferencia alapmotívuma különböző tudományterületek logikai alapozása, és a konferencia témái között kiemelt téma volt a halmazelmélet (azaz a matematika logikai alapozása), algebrai logika és a téridő-elméletek logikai alapozása. A konferencián e témák összefüggését, egységét hangsúlyoztuk. Több résztvevő is kiemelte, hogy különösen vonzó volt számára, hogy e témák együtt voltak egy konferencián és így mindegyik témabeli előadásokat meg tudta hallgatni, míg egyébként egy olyan konferenciára nem tudott volna elmenni mely témájának nem specialistája. (Egy kutató általában csak egy téma specialistája.) Többen javasolták hogy máskor is szervezzünk hasonló témaösszeállítású konferenciát. A konferencia tiszteletbeli elnöke Hajnal András és Surányi János volt. A konferencia szervezőbizottságában a jelen OTKA tagjai közül sokan résztvettek, pl. Andréka Hajnal és Németi István (társelnökök), Sági Gábor (titkár), Csirmaz László és Ferenczi Miklós (tagok). Meghívott előadók a konferencián a jelen OTKA tagjai közül Mark Hogarth, Madarász Judit és Makkai Mihály, és több OTKA-tag is előadott a konferencián. Az előadások absztraktjai megtalálhatók az Atlas honlapon, <http://atlas-conferences.com/cgi-bin/abstract/caqb-01>. A konferencia honlapja: <http://www.renyi.hu/conferences/lh05/>.

Ez a konferencia az OTKA kutatási munkaterv összes témájához releváns.

Számos rangos konferenciára meghívtak plenáris előadást tartani. Algebrai Logika témában a már említett két konferencián (Montreux, Svejc, 2005 és Xian, Kína, 2007) kívül meghívott előadók voltunk a nagy varsói Trends in Logic III konferencián 2005-ben. Relativitáselmélet logikai felépítése témában meghívott plenáris előadást tartottunk a már említett bristoli konferencián kívül a berlini First-order Logic' 75 konferencián (2003), a relativitáselmélet egyik fellegvárában, Oxfordban, a „Conference on Philosophical and Foundational Issues in Spacetime Theories” konferencián (2004), a Workshop on Logic of Space konferencián (Freiburg, 2004), a „Mathematics, Physics and Philosophy in the Interpretations of Relativity Theory” nemzetközi konferencián (PIRT, Budapest, 2007), a Symposium on Logic and Physics konferencián (Utrecht, 2008). A relativitáselmélet és kiszámíthatóság vizsgálata témában felkértek meghívott plenáris előadás tartására a következő konferenciákon: Current Trends in Theory and Practice of Computer Science SOFSEM06 Prága 2006, Computability in Europe 2006: Logical Approaches to Computational Barriers, Swansea UK 2006, Unconventional Computing, Bécs, 2008.

Harvey Friedman és Martin Davis a matematikai logika és matematika alapjai téma meghatározó egyéniségei. A gondozásukban megjelenő FOM (Foundations of Mathematics) bulletin board-ot több mint 800 „előfizető” követi rendszeresen. Harvey Friedman kezdeményezésére több esszét tettünk közzé a FOM-on a logika és relativitáselmélet témában. Ezeknek kb. 2/3 -át Friedman írta és 1/3 -át mi írtuk és természetesen utalunk egymásra. Ld. a FOM 2004 januári és februári archivumát.

HIVATKOZÁSOK

- [AHS07] Adámek J; Hebert M; Sousa L.: A logic of Injectivity., Journal of Homotopy and Related structures 2,2:13-47, 2007
- [A03a] Andai A.: Információgeometria a kvantummechanikában., Doktori Értekezés, BME. (iv)+220 old., 2003
- [A03b] Andai A.: Monotone Riemannian metrics on density matrices with non-monotone scalar curvature., Journal of Mathematical Physics 44:3675-3688, 2003
- [A07a] Andai A.: On the curvature of the quantum state space with pull-back metrics., Linear Algebra and Its Applications 423: 287-304, 2007
- [A07b] Andai A.: On the geometry of generalized Gaussian distributions. Benyújtva 2007. <http://uk.arxiv.org/pdf/0706.0606.pdf>
- [ACMNS07] Andr  ka H; Comer SD; Madar  sz JX; N  meti I; Sayed-Ahmed T.: Epimorphisms in cylindric algebras., K  zl  sre elfogadva. Algebra Universalis, 2007
- [AMN04a] Andr  ka H; Madar  sz JX; N  meti I.: Logical analysis of relativity theories., In: Hendricks V, Neuhaus V, Pedersen S.A, Scheffler U, Wansing H. (ed.) First-order logic revisited, Berlin: Logos Verlag. pp.7-36., 2004

- [AMN04b] Andréka H; Madarász JX; Németi I.: Algebras of relations of various ranks, some current trends and applications., *Journal of Relational Methods in Computer Science* 1: 27-49., 2004
- [AMN05] Andréka H; Madarász JX; Németi I.: Mutual definability does not imply definitional equivalence, a simple example., *Math. Log. Quart.* 51,6 : 591-597., 2005
- [AMN07] Andréka, H. Madarász, J.X. Németi, I.: Logic of spacetime and relativity., In: *Handbook of Spatial Logics*. Eds: Aiello, M. Pratt-Hartmann, I. and van Benthem, J. Springer-Verlag. pp.607-701., 2007
- [AMNSz03] Andréka H; Madarász JX; Németi I; Székely G.: A logical investigation of inertial and accelerated observers in flat space-times., In: *Kalm r Workshop on Logic and Computer Science*, Gécseg F. Csirik J.  s Turán Gy. szerk., Department of Informatics, University of Szeged, Szeged, Hungary. 45-57., 2003
- [AMNSz07] Andréka H; Madarász JX; Németi I; Székely G.: Axiomatizing relativistic dynamics without conservation postulates., *Studia Logica*, megjelen s alatt. 20 old., 2007
- [AN77] Andréka H; Németi I.: A general axiomatizability theorem formulated in terms of cone-injective subcategories. In: *Universal Algebra (Proc. Coll. Esztergom 1977)* Colloq. Math. Soc. J. Bolyai Vol 29, North-Holland, Amsterdam, pp.13-35, 1981
- [ANSa07] Andréka H; Németi I; Sain I.: *Universal Algebraic Logic (dedicated to the unity of science)*. Birkhauser Verlag, közlésre elfogadva.
- [AN07] Andréka H; Németi I.: Omitting types in first-order logic with two variables., *K zirat*, 2007
- [ANS07] Andréka H; Németi I; Sayed-Ahmed T.: Omitting types for finite variable fragments and complete representations of algebras., *Journal of Symbolic Logic* 73,1: 65-89, 2008
- [ANW07] Andréka H; Németi I; Wüthrich C.: A twist in the geometry of rotating black holes: seeking the cause of acausality., *General Relativity and Gravitation*, megjelen s alatt. 21 old., 2007
- [E04] Etesi G.: An integrability theorem for almost Kahler manifolds., *arXiv:math.dg/0412136*, 2004
- [E06] Etesi G.: The topology of asymptotically locally flat gravitational instantons., *Phys. Lett. B* 641, 461-465., 2006
- [E07a] Etesi G.: Homotopic classification of Yang-Mills vacua taking into account causality., *Int. Journ. Theor. Phys.* 46: 832-847., 2007
- [E07b] Etesi G.: Gravitational interpretation of the Hitchin equations., *Journ. Geom. Phys.* 57: 1778-1788., 2007
- [EJ07] Etesi G; Jardim M.: Moduli spaces of self-dual connections over asymptotically locally flat gravitational instantons., *Commun. Math. Phys.*, közlésre elfogadva., 2007
- [F05] Ferenczi M.: Probabilities on first order models., *Publications de l'Institut Mathematique (Beograd)* 78(92), pp.107-115., 2005
- [F07a] Ferenczi M.: Finitary polyadic algebras from cylindric algebras., *Studia Logica* 87, pp.1-11., 2007
- [F07b] Ferenczi M.: On cylindric algebras satisfying the merry-go-round properties., *Logic Journal of IGPL* 15,2: 183-199., 2007
- [FS06] Ferenczi M; S gi G.: On Some Developments in the Representation Theory of Cylindric-Like Algebras., *Algebra Universalis* vol 55, pp.345-353., 2006
- [H03] Henk Cs.: Characterizing representability of J nsson dynamic algebras parametrized by free Kleene algebras., In: *Kalm r Workshop on Logic and Computer*

- Science, Gécseg F. Csirik J. Turán Gy. (ed.), Department of Informatics, University of Szeged, Szeged, Hungary.
- [H04] Henk Cs.: A qualitative approach to the Church-Turing Thesis. Logic Colloquium 2004, Torino, Olaszország, 2004
- [Ho04] Hogarth M.: Deciding arithmetic using SAD computers., *Brit. J. Phil. Sci.* 55: 681-691., 2004
- [M07] Madarász JX.: Surjectivity of epimorphisms in varieties of algebraic logic., *Benyújtva*, 30 old., 2007
- [MNT04] Madarász JX; Németi I; Tőke Cs.: On generalizing the logic-approach to space-time towards general relativity: first steps., In: Hendricks V. Neuhaus F. Pedersen SA. Scheffler U. Wansing H. (ed.) *First-order logic revisited*, Berlin: Logos Verlag. pp.225-268., 2004
- [MNSz06] Madarász JX; Németi I; Székely G.: Twin Paradox and the logical foundation of relativity theory., *Foundation of Physics* vol.36,5. pp.681-714., 2006
- [MNSz07] Madarász JX; Németi I; Székely G.: First-order logic foundation of relativity theories., In: *New logics for the XXIst century. Vol II. Mathematical Problems from Applied Logics*, Springer. pp.217-252., 2007
- [MS07] Madarász JX; Sayed-Ahmed T.: Amalgamation, Interpolation and epimorphisms in algebraic logic., *Algebra Universalis* 56,2: 179-210., 2007
- [MT03] Madarász JX; Tőke Cs.: Duality between observational and theoretical concepts in relativity theory analysed by FOL and definability theory., In: *Kalmár Workshop on Logic and Computer Science*, Gécseg F. Csirik J. Turán Gy. (ed.), Department of Informatics, University of Szeged, Szeged, Hungary. pp.133-143., 2003
- [Ma97] Makkai M.: First order logic with dependent sorts, with applications to category theory., Department of Mathematics, McGill University, 1997. 199 old. <http://www.math.mcgill.ca/makkai/folds>
- [Ma05] Makkai M.: The word-problem for computads., Department of Mathematics, McGill University, 2005. 135 old. <http://www.math.mcgill.ca/makkai/-computad.zip>
- [Ma07] Makkai M.: Computads and 2-dimensional pasting diagrams., Department of Mathematics, McGill University, 2007. 143 old. <http://www.math.mcgill.ca/-makkai/2dcomputads/2dcomputads.pdf>
- [ND06] Németi I; Dávid Gy.: Relativistic computers and the Turing barrier., *Journal of Applied Mathematics and Computation* vol.178. pp.118-142., 2006
- [NV07a] Nagy B; Vályi S.: Interval-valued computations and their connection to PSPACE., *Theoretical Computer Science, közlésre elfogadva*. 22 old., 2007
- [NV07b] Nagy B; Vályi S.: Solving a PSPACE-complete problem by a linear interval-valued computation., In: *Computability in Europe 2006: Logical Approaches to Computational Barriers*., University of Swansea, A. Beckmann, U. Berger, B. Löwe, J. V. Tucker eds., pp.216-225., 2006
- [NV07c] Nagy B; Vályi S.: Visual reasoning by generalized interval-values and interval temporal logic., *CEUR Workshop Proceedings* vol 274, ISSN 1613-0073, pp.13-26., 2007
- [NV07d] Nagy B; Vályi S.: Interval-valued computating as a visual reasoning system., In: *Proc. 13th International Conference on Distributed Multimedia Systems*. pp.247-250., 2007
- [S04] Sági G.: A note on expressive power of fixed-point logics., *Trans. on Syst.* 5,3:1929-1933., 2004
- [SS05] Sági G; Shelah S.: On topological properties of ultraproducts of finite sets., *Math. Logic Quarterly* 51,3: 104-118., 2005

- [SS06] Sági G; Shelah S.: On weak and strong interpolation in algebraic logic., Journal of Symbolic Logic 71,1: 254-257., 2006
- [S04] Serény Gy.: Boolos-style proofs of limitative theorems., Mathematical Logic Quarterly 50(2): 211-216., 2004
- [S06] Serény Gy.: The diagonal lemma as the formalized Grelling paradox., In: Gödel Centenary 2006, M. Baaz, N. Preining eds., Collegium Logicum 9, Kurt Gödel Society, Vienna. pp.63-66., 2006
- [S07] Serény Gy.: The Liar cannot be solved., In: Truth, Unity and The Liar. (eds. Sh. Raman, T. Tulenheimo, E. Genot). Invited contributed paper, közlésre elfogadva., 26 old., 2007
- [Si07] Simon A.: Connections between quasi-projective relation algebras and cylindric algebras., Algebra Universalis 56,3-4: 263-301., 2007
- [V07a] Vályi S.: On monadic second-order theories of the causal connectability relation., Journal of Philosophical Logic, közlésre elfogadva. 12 old., 2007
- [V07b] Vályi S.: Investigations into non-classical logic - axiomatizability of spatio-temporal theories and complexity of interval-valued computations., PhD Dissertation. Doctoral School in Mathematics and Computer Science of University of Debrecen., 2007